Propriété : Soit . L’application définie par :

est un produit scalaire sur . On l’appelle le p.s. canonique (ou usuel) sur

Démonstration : ⍟

* Par construction, on a bien
* Linéarité à droite : Soient
* Soient

Alors

Donc est bien symétrique.

* Soit , alors

Donc est définie positive.

Donc c’est un produit scalaire sur

Propriété : Soient . L’application définie par

est un produit scalaire sur appelé p.s. canonique

Démonstration : ⍟

* Soient donc le produit est bien défini et donc existe et appartient à
* Soient
* Soient
* Soit notons , alors par calcul,

De plus,

Donc c’est bien un p.s. sur .

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit un espace préhilbertien réel. On rappelle qu’on note . Alors

avec égalité si et seulement si la famille est liée.

Démonstration : ⍟

Soient .

Si , alors . Ainsi il y a bien égalité et la famille est liée

Si , posons

Ainsi est une fonction polynômiale de degré 2, à valeurs . Ainsi admet au plus une racine réelle, donc son discriminant .

Ainsi

De plus, on a tq

tq

tq

tq

est liée

Propriété : (Identités de polarisation)

Soit un espace préhilbertien réel. On note la norme associée à .

on a

Démonstration : ⍟

Soient .

ce qui donne la première égalité.

ce qui donne la deuxième égalité.

Et , ce qui donne la dernière égalité.

Propriété : Soit . L’application définie par :

est un produit scalaire hermitien sur appelé produit scalaire canonique sur .

Démonstration : ⍟

* Linéarité à droite : comme sur les réels